LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Teste Final

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 10 de janeiro de 2020 **Duração:** 1H

Nome: ______________________________ **Número:** ______________

Questão	1a	1b	1c	2	3a	3b	4	Total
	20	5	15	20	10	20	10	100
Pontuação								

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas. Caso necessite de espaço adicional para responder a alguma pergunta, pode utilizar o espaço disponível no final.

1. Considere a função $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

(a) Determine e classifique todos os pontos críticos de f.

Solução: Os pontos críticos de f são as soluções do sistema $\nabla f = \mathbf{0}$, isto é

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x(y-1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Deste modo, os pontos críticos de f são: $(0,0), (0,2), (1,1)$ e $(-1,1)$. Para proceder à classificação destes pontos críticos, começamos por calcular a matriz Hessiana

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{bmatrix}$$

Substituindo agora nos pontos respetivos, temos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, H(0,2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, H(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, H(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando a cadeia dos menores principais de cada uma destas matrizes podemos concluir que

- $H(0,0)$ é definida negativa, pelo que $(0,0)$ é maximizante local.
- $H(0,2)$ é definida positiva, pelo que $(0,2)$ é minimizante local.
- $H(1,1)$ e $H(-1,1)$ são indefinidas, pelo que $(1,1)$ e $(-1,1)$ não são extremantes.

(b) Mostre que a função f não tem extremantes globais.

Solução: Tomando $x = 0$, vemos que a função $f(0, y) = y^3 - 3y^2 + 2$, pode tomar qualquer valor real, já que é contínua e $\lim_{y \to \pm\infty} = \pm\infty$. Deste modo vemos que f não é limitada inferiormente nem superiormente, pelo que não pode ter máximo nem mínimo globais.

(c) Determine os extremos globais de f no conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Solução: Começamos por observar que otimizar $f(x, y)$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$ é equivalente a otimizar $g(x, y) = 3x^2y + y^3 - 1$, sujeita à mesma restrição. Como g é uma função contínua em M, que é um conjunto compacto, g vai ter máximo e mínimo globais em M (Teorema de Weierstrass). Por outro lado, como a função objetivo e a restrição são diferenciáveis e a matriz Jacobiana das restrições tem característica máxima em M, o máximo e mínimo globais são necessariamente atingidos em pontos críticos da função Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x^2y + y^3 - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Ora,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 2\lambda x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(3y - \lambda) = 0 \\ 3 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Observando a primeira equação, temos dois casos possíveis:

1. Se $x = 0$, usando a terceira equação, obtemos $y = \pm 1$ e através da segunda equação podemos obter os valores correspondentes dos multiplicadores λ. Os pontos $(0, \pm 1)$ são assim soluções do sistema.

2. Se $\lambda = 3y$, substituindo na segunda equação, obtemos $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, e substituindo estes valores de y na terceira equação, obtemos os correspondentes valores de x. Novamente, a segunda equação permite obter todos os valores de λ para cada um dos pares (x, y) encontrados. Assim, os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ são soluções do sistema.

Calculando os valores da função objetivo g em cada um dos pontos obtidos:

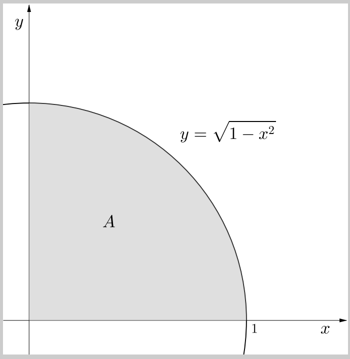
$$g(0, 1) = 0, g(0, -1) = -2, g(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = g(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$$g(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = g(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} - 1$$

vemos que o mínimo global é $-\sqrt{2} - 1$ e o máximo global é $\sqrt{2} - 1$.

2. Calcule $\iint_A xy\, e^{x^2 + y^2} dxdy$, onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \land y \geq 0 \land x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solução:



$$\begin{aligned}\iint_A xye^{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^1 xe^{x^2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ye^{y^2}dydx\\ &= \int_0^1 xe^{x^2}\left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}xe^{x^2}(e^{1-x^2}-1)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 ex - xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e}{2}x^2-\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial $y''-2y'+5y=5e^{2x}$.

(a) Determine todos os valores $k\in\mathbb{R}$ para os quais $g(x)=ke^{2x}$ é solução da equação diferencial.

Solução: A função $g(x)$ é solução equação diferencial se $g''-2g'+5g=5e^{2x}$. Ora, uma vez

$$g''-2g'+5g=(ke^{2x})''-2(ke^{2x})'+5ke^{2x}=4ke^{2x}-4ke^{2x}+5ke^{2x}=5ke^{2x},$$

a função $g(x)$ será solução se e só se $k=1$.

(b) Determine a solução da equação diferencial que verifica as condições $y(0)=1$ e $y'(0)=0$.

Solução: Trata-se de uma equação diferencial linear, de segunda ordem, com coeficientes constantes. Sabemos que a sua solução se pode escrever na forma $y=y_h+y_p$, em que y_h é a solução geral da equação homogénea associada e y_p é uma solução particular da equação dada.

1. A solução geral da equação homogénea poder ser determinada depois de calculadas as raízes do polinómio característico $P(D)=D^2-2D+5$, ou seja $D=1\pm 2i$. Assim,

$$y_h=e^x\left(c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)\right),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

2. A alínea anterior já fornece uma solução particular da equação, pelo que podemos tomar $y_p=e^{2x}$ e concluir que a solução geral da equação é

$$y(x)=e^x\left(c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)\right)+e^{2x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

3. Finalmente, uma vez que $y(0)=c_1+1$, vemos que a condição $y(0)=1$ implica que $c_1=0$. Desse modo,

$$y'(x)=\left(c_2e^x\sin(2x)+e^{2x}\right)'=c_2e^x\sin(2x)+2c_2e^x\cos(2x)+2e^{2x},$$

pelo que $y'(0)=0$ implica que $2c_2+2=0$, ou seja, $c_2=-1$.

A solução pretendida é então $y(x)=-e^x\sin(2x)+e^{2x}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e homogénea de grau 1. Mostre que $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Solução: Nas condições propostas, a função f verifica a identidade de Euler, isto é,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Derivando a igualdade anterior separadamente em ordem a x e a y, obtemos

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Multiplicando as duas equações por x e y, respetivamente, obtemos

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Finalmente, subtraindo as duas últimas e equações e tendo em conta que nas condições propostas podemos aplicar o teorema de Schwarz (igualdade das derivadas cruzadas), chegamos à igualdade pretendida.